ESIAL 2A 2009-10
Graphes et Recherche Opérationnelle

TD5 : Programmation linéaire - Dualité

Exercice 1. *Condition d'optimalité primal-dual (COPD)/ relations d'exclusion*

Soit un programme linéaire (PL) sous forme canonique pure auquel est associé le problème dual (PLD) :

$$\text{(PL)} \begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(PLD)} \begin{cases} \min\limits_{\mathbf{y}} \left[G(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}\right] \\ A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{cases}$$

On suppose que (PL) admet une solution réalisable optimale $\mathbf{x}^*$. On sait alors (*Théorème fort de dualité*) que le problème dual (PLD) admet aussi une solution réalisable optimale $\mathbf{y}^*$. Montrer qu'on a les relations suivantes (appelées COPD ou encore relations d'exclusion) :

$$\forall i = 1, \cdots, m \quad \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) y_i^* = 0$$
$$\forall j = 1, \cdots, n \quad \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\right) x_j^* = 0.$$

(*Indications* : considérer les variables d'écarts du problème primal (PL) et du dual (PLD) et utiliser le théorème de dualité forte). Interpréter les conditions précédentes.

Exercice 2. *Dualité - Résolution par COPD*

1. Pour le problème de production suivant (cf. TD3, Exercice 1), écrire le problème dual associé et le résoudre à l'aide des *conditions d'optimalité primale-duale* (COPD) :

$$\max\left[F = 50x_1 + 40x_2 + 70x_3 + 80x_4\right]$$
$$\text{(équipement) } 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 \leq 100$$
$$\text{(main d'oeuvre) } 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 \leq 160$$
$$\text{(mat. première) } x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 20$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

2. Même question avec le problème (cf. TD3, Exercice 2 : exemple avec variable artificielle) :

$$\max\left[F = 3x_1 + 4x_2 + x_3\right]$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8/3$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 7/3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

GRO
TD5
1

Exercice 1 : Voir poly cours ...

Exercice 2 :

Variables duales : y_1 : prix unitaire d'achat équipement
y_2 : ——— main d'œuvre
y_3 : ——— matière première.

Dual.

$$\text{Min}\left[G(y) = 100\,y_1 + 160\,y_2 + 20\,y_3\right]$$

$$A^T y \geq c \quad \begin{cases} 2y_1 + 10y_2 + 1y_3 \geq 50 \\ 4y_1 + 8y_2 + y_3 \geq 40 \\ 8y_1 + 6y_2 + 2y_3 \geq 70 \\ 6y_1 + 10y_2 + 2y_3 \geq 80 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Théorème de dualité forte :

Si le primal admet une unique solution optimale x^*, alors le dual admet une unique solution optimale y^*.
et $F(x^*) = G(y^*)$.

CORD :
$$\forall i \in [\![1,m]\!],\ \Big(\overbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,x_j^* - b_i}^{-e_i}\Big)\,y_i^* = 0$$
$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \Big(\underbrace{c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,y_i^*}_{-\varepsilon_j}\Big)\,x_j^* = 0.$$

e_i variable d'écart du primal
ε_j variable d'écart du dual

→ Si $e_i^* > 0$ alors $y_i^* = 0$
et Si $y_i^* > 0$ alors $e_i^* = 0$
$\varepsilon_j^* > 0 \iff x_j^* = 0$

$e_1^* = 52 > 0 \Rightarrow y_1^* = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^* = 12 > 0 \\ x_4^* = 4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1^* = 0 \\ \varepsilon_4^* = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cancel{4y_1} + 10y_2^* + y_3^* = 50 \\ \cancel{4y_1} + 10y_2^* + 2y_3^* = 80 \end{array}\right.$$

$e_2^* = 0$

$e_3^* = 0$

Donc à résoudre $\left\{\begin{array}{l} 10y_2^* + y_3^* = 50 \\ 10y_2^* + 2y_3^* = 80 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_3^* = 30 \\ y_2^* = 2 \end{array}\right.$

ensuite déterminer ε_2^* et ε_3^*. □