GRO
C1

Chapitre 1: Programmation linéaire

I) Introduction:

① Modélisation

En R.O., modéliser c'est identifier les variables intrinsèques, les contraintes sur les variables, la fonction objectif (maximisation ou minimisation)

En Programmation Linéaire (PL), les contraintes et la fonction objectif sont linéaires en les variables.

Exemple: Un problème de production.

Une usine fabrique 2 produits P_1 et P_2 en utilisant une certaine quantité de ressources (équipement, matière première, main d'œuvre) disponibles en quantités limitées selon le tableau suivant:

	P_1	P_2	Stock
équipement	3	9	81
main d'œuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

La vente des deux produits rapportent par unité 6€ pour P1 et 4 € pour P2

Question: Quelles quantités de P1 et P2 pour maximiser le profit?

i) des variables (inconnues) : x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$: quantités de produit P1 et P2 respectivement.

ii) la fonction objectif : bénéfice : $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$

$$\rightsquigarrow \boxed{\max_{(x_1, x_2)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \right]}$$

iii) des contraintes

Stock :

équipement :	$3x_1 + 9x_2$	$\leq$	81
main d'œuvre :	$4x_1 + 5x_2$	$\leq$	55
matière première :	$2x_1 + x_2$	$\leq$	20

positivité : $x_1, x_2 \geq 0$

en résumé :

le problème de PL s'écrit :

$$\max_{(x_1, x_2)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \right]$$

sous les contraintes
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

F est linéaire en x_1 et x_2. Les contraintes aussi sont linéaires (fonctions linéaires en les variables).

GRO

C2

② Résolution graphique de l'exemple.

des contraintes où apparaissent des inégalités correspondent géométriquement à l'intersection de demi-plans. L'intersection de ces demi-plans correspond à l'ensemble des variables qui vérifient toutes les contraintes.

(Après résolution graphique, $0 \leq x_1 \leq 10$ et $0 \leq x_2 \leq 9$).

A la fonction objectif correspond une droite $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$
$= \text{Constante}$

de coefficient directeur $(-1, 6/4)$.
On cherche la constante la plus grande possible en faisant "glisser" la droite $F(x_1, x_2) =$ constante selon le coefficient directeur $(-1; 6/4)$

On part du haut et on "glisse" jusqu'à rencontrer l'ensemble des contraintes. La valeur optimale de F est alors atteinte

L'ensemble des contraintes est un polygône convexe
(polygône dans $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \ Ax \leq b\}$ avec A matrice, b vecteur)

Le maximum est atteint au moins pour un sommet du polygône.
La solution optimale est $x^* = (7,5; 5)$ et ce qui donne :
$F_{max} = 65$.

On verra que pour ce type de problème, l'ensemble des contraintes est toujours convexe et l'optimal est toujours atteint en un sommet du polyèdre (dans $\mathbb{R}^n$).

Il suffit donc d'explorer les sommets!!!

L'idée de la méthode du Simplexe est d'explorer les sommets seulement si la fonction F est plus grande.

La résolution graphique est valable pour deux voire trois variables mais pas au-delà...

③ Formes générales d'un programme linéaire

ⓐ Forme canonique mixte :

$$\text{Max } F(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

contraintes inégalité : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \in I_1$.

égalité : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i \in I_2$ $\left(\begin{array}{l} I = I_1 \cup I_2 \\ \text{ens des} \\ \text{contraintes} \\ \text{avec} \\ \text{card } I = m \end{array} \right.$

de signe : $x_j \geq 0 \quad \forall j \in J_1$.

x_j sans contraintes de signe $\forall j \in J_2$.

$J = J_1 \cup J_2$ ens. des variables avec card $J = n$

ⓑ Forme canonique pure.

Sur cette forme, il n'y a pas de contrainte égalité : $I_2 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$

On note $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$b = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$

et la matrice A de taille $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

GRO
C3

Un PL est dit sous forme canonique pure s'il s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \max \left[F(x) = c^T x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \right] \\ \text{sous les contraintes} \begin{cases} Ax \leq b & (m \text{ inégalités}) \\ x \geq 0 & (n \text{ inégalités}). \end{cases} \end{array}}$$

c) Forme standard.

Sous cette forme $I_1 = \emptyset$ et $I_2 = \emptyset$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max} \left[F(x) = c^T x \right] \\ \text{sous les contraintes :} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}}$$

On dit de plus qu'un PL est sous forme standard simpliciale si A se décompose en $A = (I_m \mid H)$ quitte à permuter les colonnes / lignes de A.
où I_m est la matrice identité $m \times m$.

d) Variables d'écart :

Proposition 1 : Tout PL sous forme standard s'écrit de façon équivalente en un PL sous forme canonique pure et inversement

Preuve :

i) forme canonique pure $\Rightarrow$ forme standard

$$Ax \leq b \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \in [\![1,m]\!].$$

$$\iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + e_i = b_i \quad \forall i \in [\![1,m]\!]$$

où $e_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 0$

des (nouvelles) variables e_i sont appelées <u>Variables d'écart</u>.

On a donc :

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Ax + e = b. \\ x \geq 0 ; \ e \geq 0 \\ \text{avec } e = (e_1, \dots e_m)^T \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (A \mid I_m) \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} = b \\ \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{A} \tilde{x} = b \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases}$$

forme standard simpliciale.

avec $\tilde{A} = (A \mid I_m)$ de taille $m \times (n+m)$

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$.

ii) Forme standard $\Rightarrow$ forme canonique pure.

$$Ax = b \iff \begin{cases} Ax \leq b \\ Ax \geq b \end{cases} \iff \begin{cases} Ax \leq b \\ (-A)x \leq -b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \tilde{\tilde{A}} x \leq \tilde{b} \end{cases}$$

avec $\tilde{\tilde{A}}$ matrice de taille $2m \times n$

$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} A \\ \hline -A \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$

GRO
C4

Exemple : Problème de production de l'introduction.

$$\text{Max } F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2.$$

forme canonique pure :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2 variables.

forme standard :

$$\text{Max } F(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = 6x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 + e_1 &= 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 &= 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 &= 20 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

5 variables

④ Solutions de base réalisables.

On considère un PL sous forme standard (avec $Ax = b$).

Définition 1 : On appelle solution réalisable tout vecteur x qui satisfait les contraintes i.e.

$$Ax = b \text{ et } x \geq 0.$$

hyp : On suppose désormais que $\text{rang } A = m \leq n$
(il y a plus de variables que de contraintes et A de rang plein)

Rappel : rang A = nb max de colonnes de A linéairement indépendantes
= ——— lignes ———

Sous l'hypothèse de rang plein, le système $Ax = b$ admet toujours une solution.

Si $m < n$, il y a une infinité de solution à $Ax = b$

Si $m = n$, A est inversible : il y a une seule solution $x = A^{-1} b$, le problème d'optimisation n'a plus vraiment de sens... $\max_x F(x) = F(x^*)$.

Si $\text{rang}(A) < m$, le système $Ax = b$ n'a pas de solution en général.
(il y a au moins 2 lignes de A qui sont multiples l'une de l'autre)

Si $b \in \text{Im} A$ (rang $A < m$), il y a (au moins) 2 contraintes (égalités) redondantes
$\Rightarrow$ On peut toujours en supprimer une. En conclusion, l'hypothèse faite (rang plein) n'est pas restrictive.

<u>Définition 2</u> : Soit $B \subset \{1, \dots, n\}$ un ensemble d'indices avec $\text{card}(B) = m$ tel que A^j, $j \in B$ où A^j est la j-ième colonne de A,

sont des vecteurs linéairement indépendants. Autrement dit, la (sous-)matrice carrée A_B formée des colonnes A^j, $j \in B$, est inversible. On dit que l'ensemble B est une base.

- des variables $x_B = (x_j, j \in B)$ sont appelées variables de base.
- des variables $x_H = (x_j, j \notin B)$ sont appelées variables hors-base.

Le système $Ax = b$ est équivalent à :

$$\underset{m \times m}{A_B} x_B + \underset{m(n-m)}{A_H} x_H = b$$

où A_H est la sous matrice formée des colonnes A^j, $j \notin B$.

Si x_H est fixé ou connu, alors x_B est déterminé par :

$$x_B = A_B^{-1} (b - A_H x_H).$$

GRO

C5

Définition 3: On dit que $x = (x_B \mid x_H)$ est solution de base associée à la base B si $x_H = 0$
et dans ce cas $x_B = A_B^{-1} b$.

Exemple: Problème de production sous forme standard.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

rang $A = 3 = m$ Une base $B = \{3, 4, 5\}$

$m = 5$ $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Solution de base $x = (x_B \mid x_H)$ avec $x_H = 0$

Ici $x_B = (e_1, e_2, e_3)$ et $x_H = (x_1, x_2) = (0, 0)$.

$$= \underbrace{A_B^{-1}}_{Id} b = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Solution de base $x = (0, 0, 81, 55, 20)$
et elle est réalisable car $x \geq 0$

Remarque: Il y a au plus C_m^m solutions de base.
(pas toutes réalisables)

③ Propriétés géométriques des solutions de base réalisables

On note $\mathcal{D}_R = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b \text{ et } x \geq 0\}$
l'ensemble des solutions réalisables.

Proposition 2 : L'ensemble $\mathcal{D}_R$ des solutions réalisables est un polyèdre convexe, fermé.

Preuve : cf TD. 2

Remarques :
- un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ est défini par $\{x \in \mathbb{R}^n, Mx \leq b\}$ avec M une matrice de taille $m \times n$.
- convexe : non convexe :

Définition : (Point extrême ou sommet).

Un point $x \in \mathcal{D}_R$ est un sommet ssi $\nexists\, y$ et $z \in \mathcal{D}_R$, $y \neq z$ tels que $x = \lambda y + (1-\lambda) z$ avec $0 < \lambda < 1$.

Théorème 1 : x est une solution de base réalisable si et seulement si x est un sommet de $\mathcal{D}_R$

Autrement dit : $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ avec $x = (x_B | x_H)$ avec $x_H = 0$ et A_B inversible

Théorème 2 : L'optimum de F sur $\mathcal{D}_R$, s'il existe, est atteint en au moins un sommet de $\mathcal{D}_R$.

Preuve : cf TD. 2

GRO
C6

Remarques : 1) On cherche la solution du PL en explorant les sommets du polyèdre $\mathcal{D}_R$: tout se passe avec les solutions de base.

On pourrait énumérer toutes les solutions de base et comparer les valeurs de la fonction F

Mais ceci est vite très gourmand !!

Il y a au plus C_n^m solutions de base réalisables.

A chaque solution de base réalisable $x = (x_B \mid x_{H=0})$, il faut résoudre un système linéaire. $x_B = A_B^{-1} b$. Par exemple $m = 10$ et $n = 20 \Rightarrow C_{20}^{10} \approx 15\,000\,000$ (car méthode $\times 10^3$)

L'idée de la méthode du simplexe est d'explorer uniquement les sommets (solutions de base) qui augmentent la fonction objectif.

2) $\mathcal{D}_R$ n'est pas nécessairement borné. On a 3 situations possibles :

→ $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$: PL impossible

→ $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ mais la fonction F n'est pas majorée sur $\mathcal{D}_R$. Le max vaut $+\infty$ (si $\mathcal{D}_R$ est borné, ce cas est exclu).

→ $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ et F est majorée sur $\mathcal{D}_R$. Alors PL admet une solution optimale (non nécessairement unique).

II) Algorithme du simplexe.

Tout se passe avec les solutions de base. L'algorithme du simplexe comporte 2 phases :

- Phase 1 : Initialisation : Trouver une solution de base réalisable.
- Phase 2 : Progression : On passe d'un sommet à un sommet voisin pour augmenter la fonction objectif.

① L'algorithme du simplexe proprement dit : La phase 2 :

On dispose d'une solution de base réalisable $\underline{x}$ d'un PL sous forme standard. À une permutation près des colonnes, la matrice A sous la forme $A = (A_B \mid A_H)$ avec A_B de taille $m \times m$, inversible (variables de bases)
A_H de taille $m \times (n-m)$ (variables hors base).

et $\underline{x} = (\underline{x}_B \mid \underline{x}_H)$ avec $\underline{x}_H = 0$
Le but est de changer de base et de trouver une base B^* et solution de base x^* associée telle que : $F(x^*) > F(\underline{x})$,
(soit x^* est meilleur que x)

$\Longrightarrow$ La méthode du simplexe consiste à faire rentrer une variable hors-base dans la nouvelle base (variable "entrante") et faire sortir, à la place, une variable de base (variable "sortante").

base B : $\underline{x} = \left(\underbrace{\overset{s}{\overline{\quad x_B \quad}}}_{\text{base}} \;\middle|\; \underbrace{\overset{e}{\overline{\quad x_H = 0 \quad}}}_{\text{hors-base}} \right)$ $\qquad F(\underline{x}) = c^T \underline{x} = c_1 \underline{x}_1 + \dots + c_n \underline{x}_n$.

base B^* : $x^* = \left(\underset{x_s}{\overline{\quad 0 \quad}} \;\middle|\; 0 \dots 0 \; \underset{\neq 0}{x_e} \; 0 \dots 0 \right)$

GRO
C7

ⓐ Calcul des coûts réduits et la variable entrante

On écrit la fonction objectif F avec les variables base / hors-base.

On a : $b = Ax = A_B x_B + A_H x_H$. ($A_B$ inversible).

et

$$x_B = A_B^{-1}(b - A_H x_H).$$

et $F(x) = c^T x = c_B^T x_B + c_H^T x_H$. avec $c = (c_B | c_H)$

On a : $F(x) = c_B^T A_B^{-1}(b - A_H x_H) + c_H^T x_H$.

$$= c_B^T \underbrace{A_B^{-1} b}_{\underline{x_B}} + (c_H^T - c_B^T A_B^{-1} A_H) x_H.$$

Or $\begin{cases} \underline{x_B} = A_B^{-1} b \\ \underline{x_H} = 0 \end{cases}$ Donc : $c_B^T \underline{x_B} = F(\underline{x})$.

$$\boxed{\Rightarrow \quad F(x) = F(\underline{x}) + \underbrace{(c_H^T - c_B^T A_B^{-1} A_H)}_{L_H^T \in \mathbb{R}^{n-m}} x_H}$$

vecteur des coûts réduits.

- Si $L_H^T \leq 0$: il n'est pas possible d'augmenter F : le maximum est atteint en $\underline{x}$.
- Dans le cas contraire, (il existe au moins $(L_H)_i > 0$), on a intérêt à faire entrer dans la base, la variable hors-base qui a le coût réduit positif le plus grand possible. On note "e" l'indice de la variable entrante :

$$(L_H)_e = \max_j \{(L_H)_j \,,\ (L_H)_j > 0\}.$$

On note $e = \operatorname{argmax}_j \{(L_H)_j \,,\ (L_H)_j > 0\}$.

ⓑ Variable sortante.

Une fois l'indice e choisi, il faut déterminer quelle variable sort de la base. On augmente x_e jusqu'à annuler une variable de base tout en maintenant la relation $Ax = b$.

$Ax = b \iff A_B x_B + A^e x_e = b$. où A^e est la colonne n° e de A.

$\iff x_B = A_B^{-1}(b - A^e x_e) = \underbrace{A_B^{-1} b}_{\underline{x}_B} - A_B^{-1} A^e x_e$.

$\iff x_B = \underline{x}_B - z\, x_e$ avec $z = A_B^{-1} A^e$ vecteur de $\mathbb{R}^m$
$x_e \in \mathbb{R}$.

- Si $z \leq 0$, Alors $x_B \geq 0$ et on peut augmenter x_e autant qu'on veut : on aura toujours $Ax = b$ et $x \geq 0$
  Dans ce cas la fonction objectif n'est pas majorée sur $\mathcal{D}_R$, i.e. le max vaut $+\infty$ (arrêt de l'algo).
- Dans le cas contraire ($\exists z_i > 0$), on veut $x_B = \underline{x}_B - z x_e \geq 0$
  On choisit l'indice s tel que $x_s = (x_B)_s = 0$
  On choisit $\boxed{s = \underset{i}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{(\underline{x}_B)_i}{z_i},\ z_i > 0 \right\}}$

i.e. : $x_e = \frac{(\underline{x}_B)_s}{z_s} \leq \frac{(\underline{x}_B)_i}{z_i}$, $\forall i, z_i > 0$

et on a $x_e = \min_i \frac{(\underline{x}_B)_i}{z_i}$, $z_i > 0$.